

接触问题形状优化的边界元法 及其工程应用

南京航空航天大学 申秀丽 温卫东* 高德平

【摘要】 提出一种用边界元法对平面弹性接触问题进行形状优化的设计分析方法。讨论了平面接触问题形状优化中设计变量的选取、形状描述的方法以及目标函数和约束条件的确定,进行了灵敏度和形状优化的算例考核,并对航空发动机枞树形榫头/榫槽进行了形状优化设计的应用分析。

主题词: 边界元法 形状 优化 接触问题

分类号: O343.3

1 形状优化各参数的确定与物体形状描述

对接触问题进行形状优化设计,在寻优的过程中需对设计变量的不同投点值反复进行应力分析和灵敏度分析。接触问题形状优化中的目标函数和约束条件一般均为边界上的参数,因此,用边界元法求解具有较高的精度;边界元法由于其所含节点数较少,求解速度较快,可以加快优化计算的收敛速度。此外,边界元法更便于形状描述,减化了优化的前处理工作。

确定目标函数。在确定接触问题形状优化中的目标函数时,可以针对两接触物体中的任一物体,这时同单个物体的形状优化目标函数的选取相类似;也可选取与两接触物体都有关的参数,如果是接触面的参数,直接选取即可,如果是非接触面的参数,则要进行加权。

确定设计变量。确定设计变量前,先要确定影响各物体形状的所有参数,进行形状描述,再对其进行应力分析和灵敏度分析,对目标函数影响较大的参数便可作为设计变量,其它参数则作为定值输入,重新进行形状描述,以提高优化设计效率,保证优化结果满足工程要求。

确定约束条件。对于接触问题,与几何参数有关的约束条件可选择只与其中一物体有关的参数,也可以选择与两接触物体都有关的参数;与性能参数有关的约束条件除了选择与单个物体有关的参数外,一般还应包括接触面的参数,例如接触面的面力、应力等。

形状描述。采用边界元法或有限元法等数值方法进行形状优化中的应力分析和灵敏度分析时,其形状描述一般包括两部分内容,第一部分通过所选的设计变量确定两接触物体的形状,即在设计变量的值已知的前提下,自动生成两接触物体各节点的坐标;第二部分分析设计变量对接触物体的形状的影响,即分别求出各物体的节点坐标对其所有设计变量的导数。因此,对接触问题进行形状优化时,所确定的设计变量为两物体共有,当某一设计变量与其中一物体无关时,该物体的节点坐标对这一设计变量的导数取零。

2 应力分析和灵敏度分析

对接触问题进行应力分析和灵敏度分析时,用二次单元对边界积分方程进行离散,可推导出求解接触问题的边界元方程^[1]:

$$\sum \left[\begin{matrix} A_{ij}^{A-C} & \hat{H}_{ij}^{Aa} & \hat{H}_{i1}^{As} & \hat{H}_{i2}^{As} & 0 & -\hat{G}_{ij}^{Aa} & -(\hat{G}_{i1}^{As} \pm \hat{G}_{i2}^{As}) & 0 \\ 0 & -\hat{H}_{lk}^{Ba} & -\hat{H}_{l1}^{Bs} & 0 & A_{lk}^{B-C} & -\hat{G}_{lk}^{Ba} & -(\hat{G}_{l1}^{Bs} \pm \hat{G}_{l2}^{Bs}) & \hat{H}_{l2}^{Bs} \end{matrix} \right] \cdot \{ \Delta x_j^{A-C} \quad \Delta v_j^{Aa} \quad \Delta v_1^{As} \quad \Delta v_2^{As} \quad \Delta x_j^{B-C} \quad \Delta q_j^{Aa} \quad \Delta q_1^{As} \quad \Delta v_2^{Bs} \}^T$$
$$= \sum \left[\begin{matrix} B_j^{A-C} & 0 & 0 \\ 0 & B_{lk}^{B-C} & -\hat{H}_{l1}^{BC} \end{matrix} \right] \cdot \{ \Delta z_j^{A-C} \quad \Delta z_k^{B-C} \quad V_1^{0,n} \}^T \quad (1)$$

上式可简写成: $[\bar{A}]\{X_j\} = [\bar{B}]\{Y_j\}$ (2)

其中 $[\bar{A}]$ 、 $[\bar{B}]$ 、 $\{X_j\}$ 和 $\{Y_j\}$ 各矩阵与(1)式中的矩阵对应。那么,相应的接触问题灵敏度分析的边界元方程由(2)式对设计变量 t 求导后可推导出^[2]:

$$[\bar{A}]\{X_{j,t}\} = [\bar{B}_{,t}]\{Y_j\} + [\bar{B}]\{Y_{j,t}\} - [\bar{A}_{,t}]\{X_j\} \quad (3)$$

(1)式中, $\hat{H}$ 和 $\hat{G}$ 表示局部坐标系下的系数矩阵, A 和 B 分别表示 A 、 B 物体未知量和已知量的系数矩阵;角标 A 、 B 为 A 、 B 物体,角标 C 为接触边界, a 为粘连接触边界, s 为滑移接触边界, i,j 和 l,k 分别为 A 和 B 物体的节点和单元, $V_1^{0,n}$ 表示接触点对在第 n 步迭代时的初始距离; x 和 z 分别为非接触边界未知的和已知的面力和位移; v 和 q 为接触边界在局部坐标系下的位移和面力; t 为设计变量。

3 算例分析

例 1 两接触长方体受外压的形状优化 本算例为平面应变问题, A 物体的长为 100 mm,宽为 100 mm; B 物体的长为 300 mm,宽为 300 mm,如图 1 所示。材料参数为 $\mu=0.3$, $G=4000 \times 10^2 \text{ N/mm}^2$,外载荷 $p=1000 \text{ N/mm}^2$,作用于 A 、 B 物体根部固支。取 A 物体的上下宽度为设计变量,即 $t_1=L_1$, $t_2=L_2$ 。

表 1 列出了灵敏度分析的结果,并与“差分法”作了比较。本文所述的差分法,即对设计变量按适当的步长取不同的值,分别进行应力分析,在此基础上差分。从表 1 可以看出,“差分法”与导数法求解的灵敏度值相比,相对误差值较小,可以认为具有较高的精度。但差分法需选择适当的步长,对于不同的设计变量要反复进行应力分析,用导数法求解只需计算一次。

表 1 用导数法和差分法求解接触点处面力对 t_1 和 t_2 灵敏度值的比较 (单位: N/mm^3)

节点号	对 t_1				对 t_2			
	5	6	7	8	5	6	7	8
导数求解	7036.0	1423.9	1445.1	1150.4	-6723.7	-1471.1	-1458.1	-1191.7
差分求解	7062.5	1482.0	1482.0	1126.9	-6713.0	-1470.0	-1456.5	-1190.0
相对误差	0.4%	0.5%	2.5%	2.0%	0.15%	0.07%	0.11%	0.07%

在进行形状优化时改变设计变量的初值,即初始投点取: $t_1=46 \text{ mm}$, $t_2=54 \text{ mm}$,如图 2 所示。应力目标函数的初值为 $f(x)=1001.59 \text{ N/mm}^2$ 。两个设计变量的上下界分别取 $44.5 \text{ mm} \leq t_1 \leq 55.5 \text{ mm}$ 和 $44.5 \text{ mm} \leq t_2 \leq 55.5 \text{ mm}$ 。该力学模型的形状化的数学模型为: $\min: f(t) = \max[\sigma_a(i)]$ (i 指 A 、 B 物体所有边界节点), $\text{s.t.}: t_1+t_2 \leq 100$ 。

该力学模型的形状优化的理论解应为下宽上窄。形状优化的结果为: $t_1 = 55.5 \text{ mm}$, $t_2 = 44.5 \text{ mm}$, $f(x) = 750.509 \text{ N/mm}^2$, 如图 2 所示。

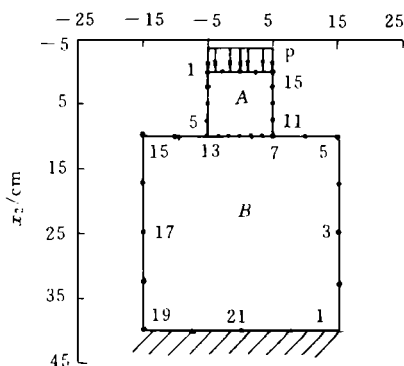


图1 两长方体接触的边界元分析模型

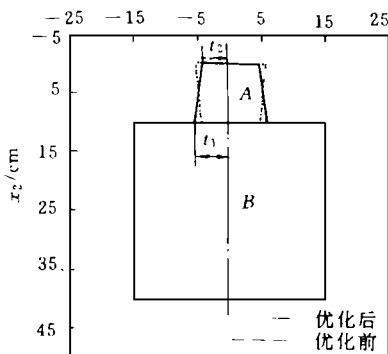


图2 优化前后结果图示

例 2 榫头/榫槽的形状优化分析 由于把榫头/榫槽作为平面问题处理时均为对称结构, 在计算时可选取结构的一半作为计算模型, 如图 3 所示。计算时叶片的离心力等效为静拉伸力作用在榫头上, 即 $q = 158.3034 \text{ N/mm}^2$ 。将榫头边界划分为 39 个三节点二次单元, 78 个节点; 榫槽的边界划分为 49 个三节点二次单元, 98 个节点, 其中, 各对榫齿接触面内划分为 3 个单元, 7 个节点。计算时, 榫头/榫槽的节点坐标根据设计变量的值自动生成, 如图 4 所示。榫头/榫槽的材料 $\mu = 0.305$, $G = 69000 \text{ N/mm}^2$, $\rho = 8.21 \times 10^{-3} \text{ kg/mm}^3$ 。

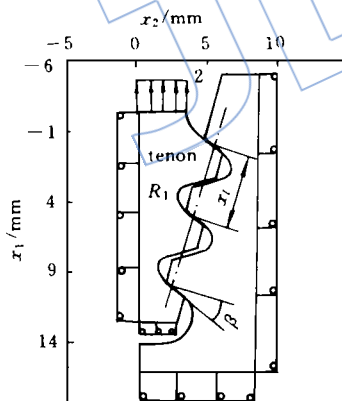


图3 榫头/榫槽计算模型图

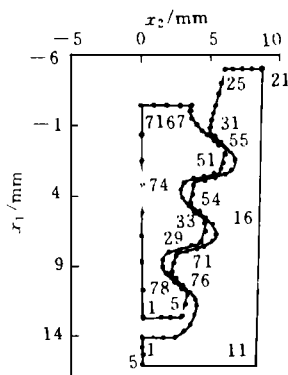


图4 榫头与榫槽节点图

本文将结构边界上节点的最大当量应力作为目标函数, 即在优化的过程中, 使得结构边界上的最大当量应力值最小: $\min: f(x) = \max[\sigma_d(i)]$ (i 指边界节点)。在优化过程中, 取约束条件 g_1 : 榫头第一齿齿颈处的拉伸应力 $\leq$ 许用应力; g_2 : 齿面的挤压应力 $\leq$ 许用应力; g_3 : 榫槽最后一齿齿颈处的拉伸应力 $\leq$ 许用应力。在设计变量的选择过程中, 考虑了工艺的要求和形状优化的局部优化的特点, 本文选齿距 x_1 、齿形倾斜角 β 和接触面圆弧半径 R_1 为设计变量。

由于节点坐标对设计变量的导数的正确与否直接影响力灵敏度的结果, 因此, 在形状优化前, 首先用差分求解各节点坐标的灵敏度, 以考核节点坐标对各设计变量的导数, 并在此基础上进行应力灵敏度分析。形状优化的结果见表 2。

表 2 优化前后的设计变量、目标函数和约束条件的对比值 (单位: mm, N/mm²)

	t_1	t_2	t_3	f	g_1	g_2	g_3	CPU
优化前	1.4	22.00	5.29	265.69	- 32.54	50.52	- 5.46	
向前差分优化	1.3	21.96	2.20	235.32	- 22.41	- 7.39	- 8.44	7'
灵敏度优化	1.3	22.50	5.20	234.52	- 21.78	- 4.59	- 11.15	4'

表 2 中, t_1 、 t_2 和 t_3 表示 x_1 、 β 和 R_1 , f 表示目标函数, 即当量应力 σ_d , g_j 表示第 j 个约束条件。由表 2 可以看出, 优化前榫头的最大挤压应力不满足第二个约束条件, 优化后所有约束条件都得到满足。且灵敏度解的最大当量应力降低了 11.7%。差分分解的最大当量应力降低了 11.4%。用导数求解灵敏度比用差分求解灵敏度效果更优, 且对于这样复杂的结构, 用差分法进行优化所用的时间, 远大于用灵敏度进行优化所用的时间。图 5 为进行形状优化前后榫头/榫槽的形状变化图。

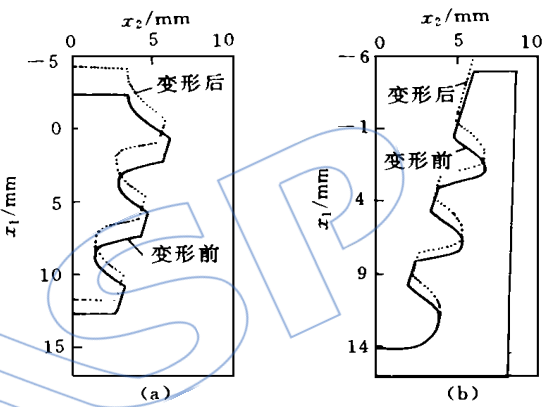


图 5 优化前后榫头(a)和榫槽(b)的形状图

小结 本文采用边界元法对平面弹性接触问题进行了形状优化分析。结果表明, 用边界元法对平面接触问题进行应力分析和灵敏度分析具有较高的精度, 进行形状优化时, 迭代速度较快, 效果比较理想。在榫头/榫槽的形状优化分析中, 用导数法求解灵敏度进行优化与用差分法求解灵敏度进行优化相比, 所用的迭代时间要少得多。

参 考 文 献

1 温卫东, 高德平. 榫头/榫槽接触问题的边界元分析. 航空动力学报, 1992, 7(2)

2 申秀丽. 二维弹性接触问题结构形状优化的边界元数值方法及应用研究: [学位论文]. 南京航空航天大学, 1996

3 Mota Soares C A, Rodrigues H C, Faria L M O, Hang E J. Optimization of the Shape of Solid and Hollow Shafts Using Boundary Element. Proc. 5th Int. Conf. BEM, 1983

(责任编辑 王震华)

FULL- LENGTH PAPERS

SHAPE OPTIMIZATION FOR CONTACT PROBLEMS WITH BOUNDARY ELEMENT METHOD

Shen Xiuli, Wen Weidong, Gao Deping

(2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT An analytical method of shape optimization is put forward for two-dimensional elastic contact problems with boundary element method. Choice of the design variables and a method of shape description, as well as determination of target function and restrain conditions in two-dimensional elastic contact problems are considered. The numerical examples are carried out on the sensitivity and shape optimization. Furthermore, the shape optimization analysis of the fir-tree tenon/mortise in an aeroengine is carried out.

Key Words Boundary element method Shapes Optimization Contact problems

AN EXACT SOLUTION FOR FREE VIBRATION OF TOROIDAL THIN SHELL

Li Lin

(4th Dept. Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083)

ABSTRACT A new exact solution is developed which enables to determine the free vibration characteristics of toroidal thin shell with homogeneous boundary conditions. But the solution requires numerical evaluation of an eight order complex determinant to find its eigenvalues. The results are exact in the same sense as the numerical solution of the transcendental frequency equation for a beam yields an exact solution of its vibration frequency. The eigenvalues of cylindrical shell with the boundary conditions corresponding to simple-simple support (SS), clamped-free support (CF) and clamped-simple support (CS) have been calculated and their dependences on the slenderness of the shell have been found out yet. The results are compared with those obtained by other investigators using different methods and experiments.

Key Words Rotary shell Free vibration Characteristic values

NUMERICAL ANALYSIS OF BLADE TRANSIENT RESPONSES TO BIRD IMPACT UNDER CENTRIFUGAL LOADINGS

Chen Wei, Song Yingdong, Yin Jing, Gao Deping

(2nd Dept. Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016)

ABSTRACT The integrative rigidity and the local rigidity of blades are enhanced by their centrifugal loading, so that when a flying bird impacts on the aeroengine blades under their rotating states, the responses of the blades are different from those under the static states. The nonlinear transient responses of the blades to the bird impact under the different centrifugal loadings are analyzed by using the finite element method. The results